- Least Square Monte Carlo

**SOMMAIRE**

[1. Introduction 2](#_Toc37509335)

[1.1. Notation 2](#_Toc37509336)

[1.2. Pourquoi la méthode LSM classique ne marche pas sous 2](#_Toc37509337)

[2. Méthode P-LSM 4](#_Toc37509338)

[2.1. Algorithme 10](#_Toc37509339)

[2.2. La méthode marche avec quels modèles ? 13](#_Toc37509340)

[3. Commentaires 13](#_Toc37509341)

[3.1. Méthode P-LSM avec les méthodes POI de (Savine, et al., 2017) 14](#_Toc37509342)

[3.2. Méthode P-LSM avec les méthodes « Bundles » de (Feng, et al., 2016) 14](#_Toc37509343)

[4. Annexe 1 : Rappel de la méthode LSM classique sous 16](#_Toc37509344)

[5. Annexe 2 : P-LSQ avec le modèle à volatilité locale (sous ) et BS (sous ) 18](#_Toc37509345)

[6. Annexe 3 : P-LSQ avec le modèle Heston 21](#_Toc37509346)

[7. Bibliographie 23](#_Toc37509347)

Ce document est pour l’objectif de proposer une nouvelle méthode Least Square Monte Carlo qui peut être employée pour le calcul de EPE, PFE… sous la mesure historique . Cette méthode est nommée P-LSM.

# Introduction

Dans le cadre du calcul EPE, PFE, nous devons calculer sous la mesure historique . Une approche que nous pouvons employer est d’utiliser la méthode Least Square Monte Carlo.

## Notation

On calcule l’EPE d’un produit ayant plusieurs cash-flows à différentes dates sous la mesure . On note un sous-ensemble de et .

Pour simplifier le problème, on ignore le discount facteur (le taux d’intérêt est supposé 0) dans la formule de EPE.

L’EPE est calculée par

Avec la MtM

## Pourquoi la méthode LSM classique ne marche pas sous

On essaie d’appliquer la méthode LSM classique dans le calcul de l’EPE sous la mesure historique .

A la date , on diffuse scénarios sous la mesure , on note les valeurs du sous-jacent.

Il nous suffit donc de calculer les

Selon la méthode LSM, on approxime

par des fonctions de bases dépendantes de comme suit

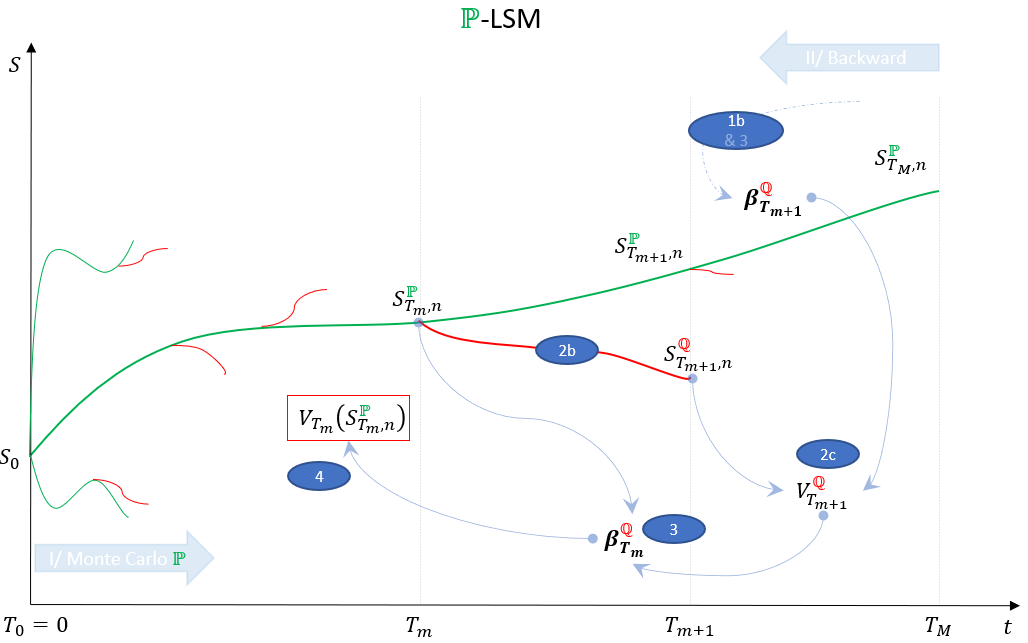
avec ,

La méthode LSQ classique détermine le vecteur en calculant de manière rétrograde et en utilisant une régression:

Mais le problème est que nous n’avons pas car au départ à la date , on projette des scénarios sous la mesure (nous n’avons que les ). Sans , on ne peut pas avoir , et donc qu’on ne peut pas pouvoir estimer les par régression de manière correcte (en effet, l’estimation des par est une estimation biaisée où nous ne savons pas encore l’ordre de grandeur de l’erreur engendrée).

Dans ce document, je propose une nouvelle méthode LSM nommée **P-LSP** qui peut calculer l’EPE sous la mesure .

# Méthode P-LSM



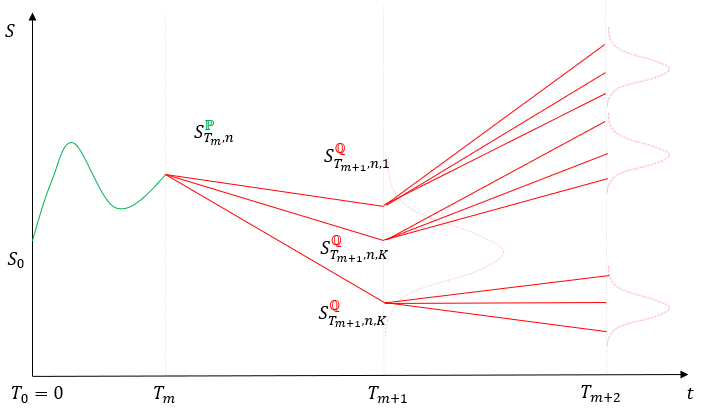
*Illustration de la méthode P-LSM*

L’EPE est l’espérance sous une intégrale de à la maturité :

Remarque : Il y a deux espérances dans le calcul d’EPE: l’espérance extérieure sous et l’espérance intérieure sous . Si on applique naïvement les simulations dans les simulations (Nested Monte Carlo), la complexité sera où (resp. ) le nombre de scénarios sous (resp. sous ). Il faut donc enlever une espérance pour réduire cette complexité.

D’abord, on transforme l’espérance intérieure  qui correspond à l’exposition calculé à la date

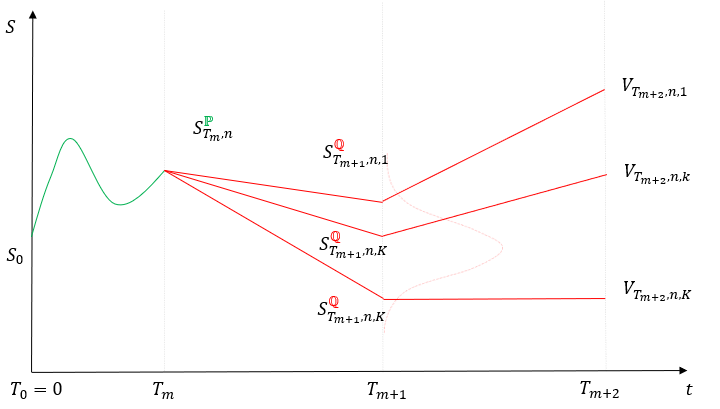
Il faut calculer ) chaque nœud . La méthode classique est de faire Nested Monte Carlo à partir de sous . Autrement dit, il faut faire au moins deux MC correspondant à deux espérances conditionnelles suivantes (comme dans le graphique du dessous)



*Nested Monte Carlo au nœud*

Une meilleure idée est d’appliquer la méthode Least Square Monte Carlo classique, au moins sur la période après . L’objectif est de trouver un (à chaque nœud ) par une régression linéaire après (comme dans le graphique du dessous) tel que

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2) |



*Régression linéaire sur la période après*

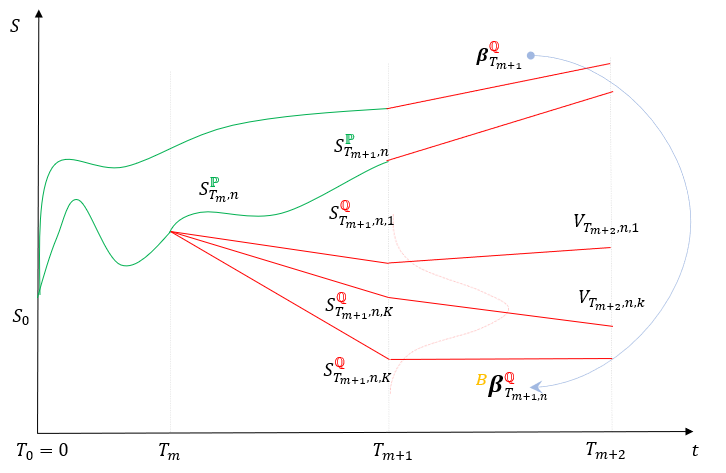
Puis,

Avec cette idée, il faut quand même fait au moins régressions (correspondant à nœud ) chaque date . Une question se pose : est-ce qu’on peut ne pas devoir calculer ces ?

1. Est-ce que  ?

En remarquant que l’on a déjà calculé dans l’étape rétrograde , à partir des supports et que . En effet, à partir de (généré sous entre )) ou (généré par le processus de diffusion sous entre ) puis sous entre ), suit toujours le même processus de diffusion markovien[[1]](#footnote-2) sous de jusqu’à la maturité . Donc, il ne peut exister qu’un seul paramètre représentant les coordonnées de la projection de sur l’espace engendré par Autrement dit, peu importe le support, .

Par conséquent, on ne doit pas recalculer pour chaque nœud , il suffit d’utiliser le déjà calculé à partir des dans l’étape rétrograde



*Estimer les coefficients de régression par différents supports ( vs )*

De (2) on a donc :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3) |

Remarque : (3) correspond à l’étape 2c de l’algorithme.

1. Régression à

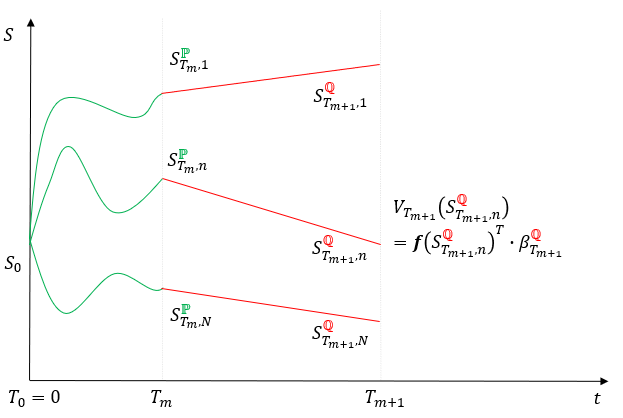
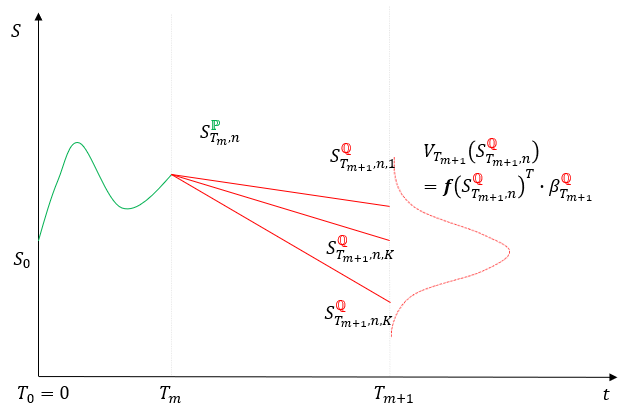
Revenir au calcul de , selon la partie du dessus, on a pu estimer tous les via le . Maintenant, au lieu d’appliquer naïvement la méthode MC à chaque nœud comme dans le graphique gauche, on peut appliquer la méthode de régression linéaire sur le support comme dans le graphique droit.

On peut projeter un seul scénario à la date sous à chaque nœud (l’étape 2b de l’algorithme) puis appliquer la méthode de régression linéaire sur le support (cela correspond à l’étape 3 de l’algorithme) pour calculer l’espérance  :

* les fonctions de base construisant à partir de et
* la valeur de

Résoudre cette régression linéaire[[2]](#footnote-3) : =, Cette régression correspond à

l’étape 3 de l’algorithme.



*Simulation Monte Carlo à chaque nœud Régression linéaire (LSM) sur le support*

On obtient

* Le paramètre qui servira pour les calculs au temps
* Les expositions au temps

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4) |

Remarque : s’il y a une option à (par exemple, exercer et terminer le produit avec un pay-off ), il suffit de comparer la valeur de continuation et la valeur d’exercise. Le membre droit de l’équation (3) devient

Revenir à (1), on a alors :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

(5) est la formule d’approximation finale de l’EPE

On constate que désormais, pour calculer EPE, il suffit d’effectuer un Monte Carlo (correspondant à l’espérance extérieure ) au lieu de faire deux Monte Carlo imbriquées (dont la complexité est de ). Si on compte aussi la MC dans l’étape 2b de l’algorithme, la complexité de P-LSM est .

## Algorithme

Dans la partie algorithme, on prend le modèle Black-Scholes pour illustration.

Remarque : On met aussi

* dans l’annexe 2 la méthode P-LSM avec le modèle à volatilité locale (sous ) et BS (sous ) (modèle de la BNP Paribas)
* dans l’annexe 3 la méthode P-LSM avec le modèle Heston[[3]](#footnote-4).

**I/ MC sous**  :

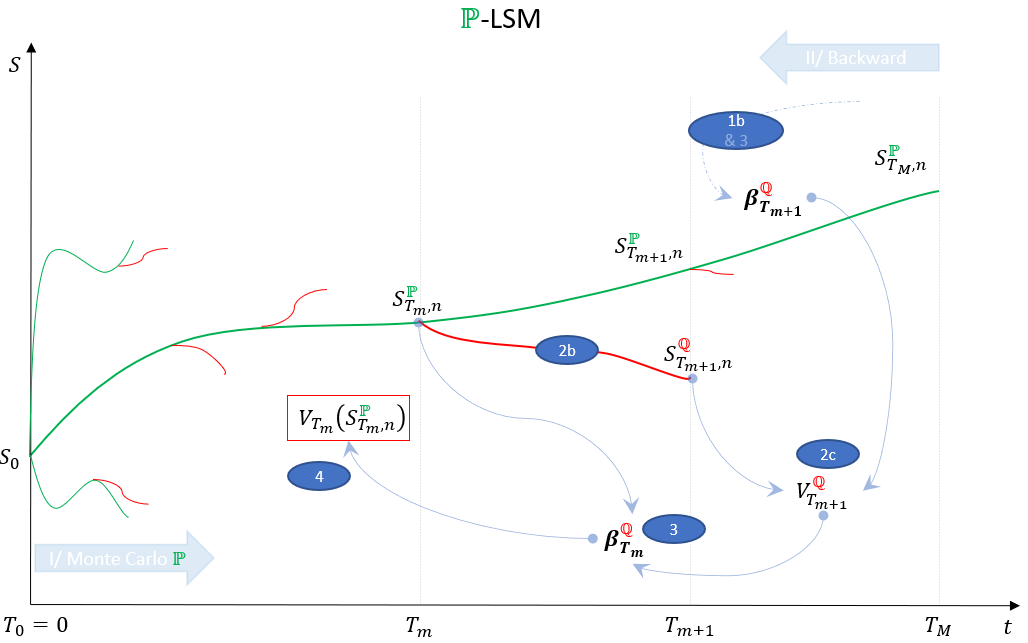
A la date , projeter scénarios dans :

**II/ Backward** : Calculer de manière rétrograde de jusqu’à (on note )

1. Etape 1 : à , Initialiser en calculant avec

Etape 1b : Initialiser les

1. Etape 2 : à pour , calculer les fonctions de base



*Illustration de la méthode P-LSM*

Etape 2b : A chaque nœud dont la valeur du sous-jacent est , projeter un seul scénario sous à la date pour obtenir .

On note bien[[4]](#footnote-5) que qui est déjà obtenu à l’étape I/MC sous . Pour rappel,

Etape 2c : Approximer à partir de et

On note bien que était déjà obtenu dans l’étape et qu’il est bien sous entre (grâce à l’étape 1b pour et l’étape 3 suivante pour ).

1. Etape 3 : Appliquer la méthode de régression pour retrouver à partir de (obtenue de l’étape I/MC sous ) et (obtenu de l’étape 2c). On note bien que la régression est bien fait sous entre
2. Etape 4 :  Comme dans la méthode LSM classique, approximer l’espérance avec les obtenue de l’étape 3

*Remarque :*

* *S’il y a un cash-flow arrive à la date , on ajoute dans le membre droit, par exemple*
* *S’il y a une option à la date (par exemple obtenir un payoff si exercer), on la fait à cette étape 4 comme suit*

Répéter les étapes 2, 3 et 4 jusqu’à  pour obtenir

**END :** A partir des obtenus, on peut calculer l’EPE

## La méthode marche avec quels modèles ?

A mon avis, la méthode peut s’appliquer au moins sur tous les modèles où le drift soit indépendant du sous-jacent (autrement dit, le modèle n’est pas « à drift local »[[5]](#footnote-6)). A ma compréhension, tous les modèles utilisés en banque le sont.

* Le processus drift et le processus taux sont indépendants[[6]](#footnote-7) de
* Exemple 1 : deux processus déterministes qui ne dépendent que de
* Exemple 2 : et sont deux procesus Vasicek, et sont indépendant de
* est un processus stochastique

## Pistes d’amélioration

Simuler un MC supplémentaire dans à partir de , puis faire les régressions sur l’ensemble des pour atténuer l’effet venant de l’écart de drift sous et sous (cet effet est plus fort si la maturité est long et sur les dates proches de ).

A réfléchir : Pourquoi il faut faire la méthode simulation de branchement ? Il suffit de simuler un MC supplémentaire dans à partir de , puis faire les régressions sur l’ensemble des pour trouver les à chaque date . L’exposition , non ?

La régression est faite seulement s’il y a un nouveau cashflow à la date , sinon, il suffit d’utiliser la formule fermée de actualisée à . (cette méthode est affaiblie si l’écart drift sous et sous est grand)

Faux : ~~Améliorer la convergence : Au lieu de faire 1 scénario, on simule scénarios dans à chaque nœud . La valeur sera la moyenne des valeurs régressées.~~

# Commentaires

Inspirée de la méthode *Branching simulation* (Savine & Huge, 2017, p. 17), la méthode P-LSQ est en revanche différente de la *Branching simulation*. L’objectif de *Branching simulation* est pour 1/résoudre le problème de CVA collatéralisée avec 2/ Monte Carlo sous tandis que l’objectif de P-LSM est pour 1/résoudre le problème de EPE, PFE 2/avec Monte Carlo sous .

La méthode P-LSQ ne dépend pas de modèle ou de produit. Cela veut dire que cette méthode est implémentée une fois pour toutes et nous pouvons l’employer pour tous types de modèles et de produits.

La complexité de la méthode P-LSM est la même de celle LSM classique. Le temps d’exécution de P-LSM est seulement deux fois plus que celui de LSM classique (en sachant que l’on doit projeter des scénarios à la fois sous et sous ).

L’idée clé de la méthode P-LSM est qu’on projette un scénario sous à chaque nœud (l’étape 2b de l’algorithme). Puis, on valorise la MtM en deux temps : entre et entre (l’étape 2c de l’algorithme)

## Méthode P-LSM avec les méthodes POI de (Savine & Huge, 2017)

La méthode P-LSQ n’est pas compatible avec la méthode POI (proxies only in indicators) proposée dans (Savine & Huge, 2017), par conséquent on ne peut non plus utiliser l’approche Branching-simulation (une extension de POI pour la CVA collatéralisée) et l’approche AAD pour POI (une extension de POI pour les sensibilités CVA). L’explication se trouve comme suit :

L’idée de la méthode POI est de faire une approximation uniquement sur l’exposition dans l’indicatrice . On écrit la formule de CVA comme dans (Savine & Huge, 2017, p. 12)

On constate qu’il y a deux espérances dans le calcul. Si la première MC était sous , on pourrait éliminer une espérance comme à la page 12 de (Savine & Huge, 2017) :

Malheureusement, on est sous , par conséquent, la méthode POI n’est pas compatible à la P-LSM (on ne peut pas réduire une espérance et donc qu’il faut faire simulation dans les simulations )

## Méthode P-LSM avec les méthodes « Bundles » de (Feng, Jain, Karlsson, Kandhai, & Oosterlee, 2016)

La méthode P-LSQ est différente aux méthodes proposées dans (Feng, Jain, Karlsson, Kandhai, & Oosterlee, 2016) : SGBM (Stochastic Grid Bundling Method), LSM-bundle et LSM-all.

Pour rappel, les méthodes proposées dans (Feng, Jain, Karlsson, Kandhai, & Oosterlee, 2016) sont faites dans 2 étapes :

* Etape 1 : Projeter des scénarios sous à la date puis faire des régressions à toutes les dates pour obtenir des paramètres **.**
* Etape 2 : Projeter des scénarios sous à la date , utiliser des paramètres obtenir sous pour calculer la MtM

Le problème : la projection des scénarios sous est faite uniquement à l’instant . Il faut plutôt le faire à tous instant . Cela entraine que l’on ne peut pas utiliser produit dans l’étape 1 dans le calcul de de l’étape 2 car il n’y a pas de connexion entre et (qui était calculé sous ).

Pour remédier à ce problème, l’auteur crée, à chaque , paquets (d’où vient le nom « Bundle »), dans les deux projection MC (sous et sous ). Les paquets sont faits en fonction des valeurs du sous-jacent.

Maintenant, revenir à l’étape 1, au lieu de calculer un seul à chaque date , l’auteur calcule des pour tous les paquets. Puis à l’étape 2, en fonction du sous-jacent (supposons que prend une valeur proche des qui sont dans le paquet ), le correspondant va être utilisé. Autrement dit,

Dans la méthode P-LSM, on projette des scénarios sous à chaque nœud . Puis, on valorise la MtM en deux temps : entre et entre

Chaque espérance est approximée via une régression :

* est estimée par avec
  + calculé de manière rétrograde à et
  + obtenu via une simulation sous à partir de
* est estimée par avecobtenu via une régression

# To do

: il faut mettre le discount factor dans les exemples

Lire la réglementation

Objectif : réduire le temps de calcul (la complexité), augmenter la précision (la vitesse de convergence). Il me faut construire (calculer) la vitesse de convergence

Lire LSM de Zeliade Pierre : c’est normal, il n’y a pas beaucoup d’idée.

Idée pour la performance :

- Il faut calculer les vrai à chaque nœud . Puis les comparer avec le calculé par ma méthode et par les méthodes de Feng.

- La métrique et la moyenne des écart de valeur à chaque date entre le modèle et celui de la méthode Nested Monte Carlo (exemple : estimation of error, theoreme 3.2 [Stochastic grid bundling method for backward stochastic differential equations](https://sci-hub.tw/10.1080/00207160.2019.1658868) et <https://link.springer.com/article/10.1186%2Fs13362-020-00073-5>, la discussion intéressante est dans la partie 3.1 du document. Pour information, ce document est intéressant et peut être utilisé pour avoir des idées des métriques et des démonstrations)

On peut appliquer la méthode Stochastic Grid Bundling Method pour améliorer la performance de la régression (cela est équivalent à faire la régression locale) : plus précise avec moins fonctions de base. -> Vraiment une amélioration de la méthode Grid Bundle !

* Ce slide est intéressant pour illustration <http://www.topquants.nl/wordpress/wp-content/uploads/2013/11/KeesOosterlee2013.pdf>
* Un these de master sur la méthode <https://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/367800/Thesis_document.pdf?sequence=2&isAllowed=y>
* Appliquer les méthodes comme K-mean The Stochastic Grid Bundling Method: Efficient pricing of Bermudan options and their Greeks. En fait, la méthode SGBM fait la regression locale, mais si le drift dans la mesure historique est très important, le support n’est plus correct, notamment quand la maturité est longue. La méthode P-LSM + SGBM pallie parfaitement l’erreur.
  + Il faut programmer un produit American comme dans l’article de Jaine (Jaina & Oosterlee, 2015)
  + Ma méthode améliore vraiment
  + Il faut coder la méthode COS pour un contre valorisation
  + Je peux faire des calculs théoriques pour trouver l’intervalle de confiance (grace à Jaine (Jaina & Oosterlee, 2015) et Glasserman (Glasserman, 2003)

Method de régression

* Regression Anytime’ with Brute-Force SVD Truncation <https://www.math.uni-sb.de/ag/bender/RAWBFST.pdf> (les notions: regress later, regress now, => a lire)

Idée pour accélérer le calcul de régression : appliquer la méthode dans Glasserman (Glasserman, 2003, p. 468)

# Revue de littérature

## La mesure risque neutre est manipulable

Réf : (Stein, Harvey, 2017)

L’auteur démontre que, si on reste dans la mesure risque neutre, on peut faire un changement de mesure approprié pour déterminer un quantile désiré. Par conséquent, la méthode n’est plus objective.

# Métriques

On définit une métrique d’erreur

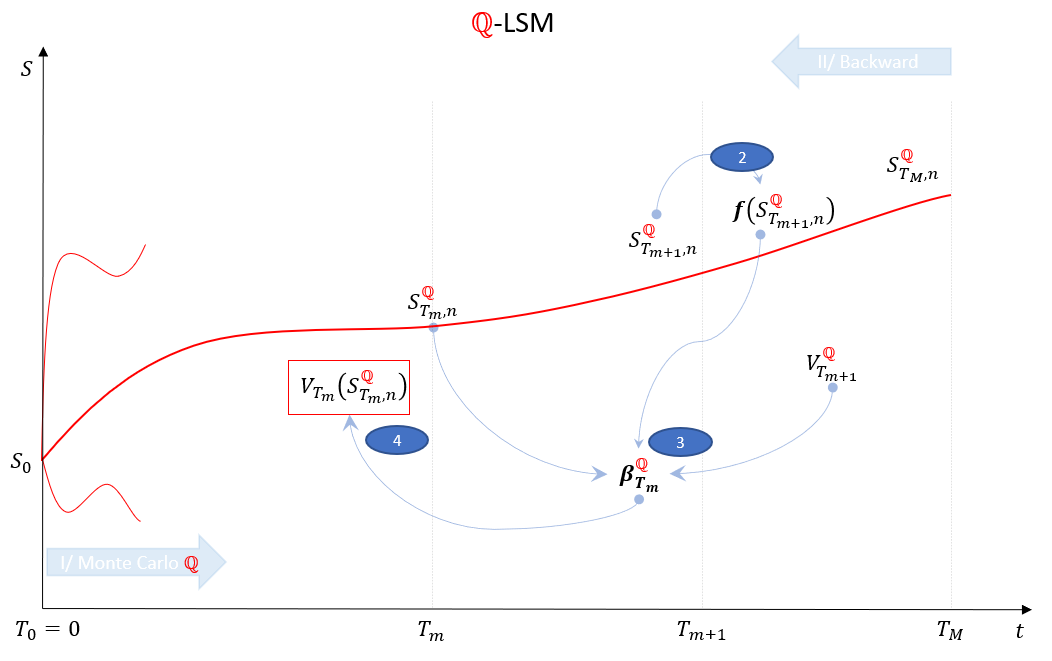
La vraie valeur à

La méthode Monte Carlo

# Annexe 1 : Rappel de la méthode LSM classique sous

**I/ MC sous**  : A la date , projeter scénarios sous

**II/ Backward** : Calculer de manière rétrograde de jusqu’à (on note )



*Illustration de la méthode LSM actuelle*

1. Etape 1 : à , Initialiser en calculant avec
2. Etape 2 : à pour , calculer les fonctions de base
3. Etape 3 : Appliquer la méthode de régression pour retrouver

*Remarque :*

* *On rappelle que et que l’on a ignoré le discount factor*[[7]](#footnote-8)

1. Etape 4 :  Approximer l’espérance avec les obtenue de l’étape 3

*Remarque :*

* *S’il y a un cash-flow arrive à la date , on ajoute dans le membre droit, par exemple*
* *S’il y a une option à la date (par exemple obtenir un payoff si exercer), on la fait à cette étape 4, comme suit*

Répéter[[8]](#footnote-9) les étapes 2, 3 et 4 jusqu’à pour obtenir

A partir des obtenus, on peut calculer l’EPE sous

# Annexe 2 : P-LSQ avec le modèle à volatilité locale (sous ) et BS (sous )

Le modèle BNP

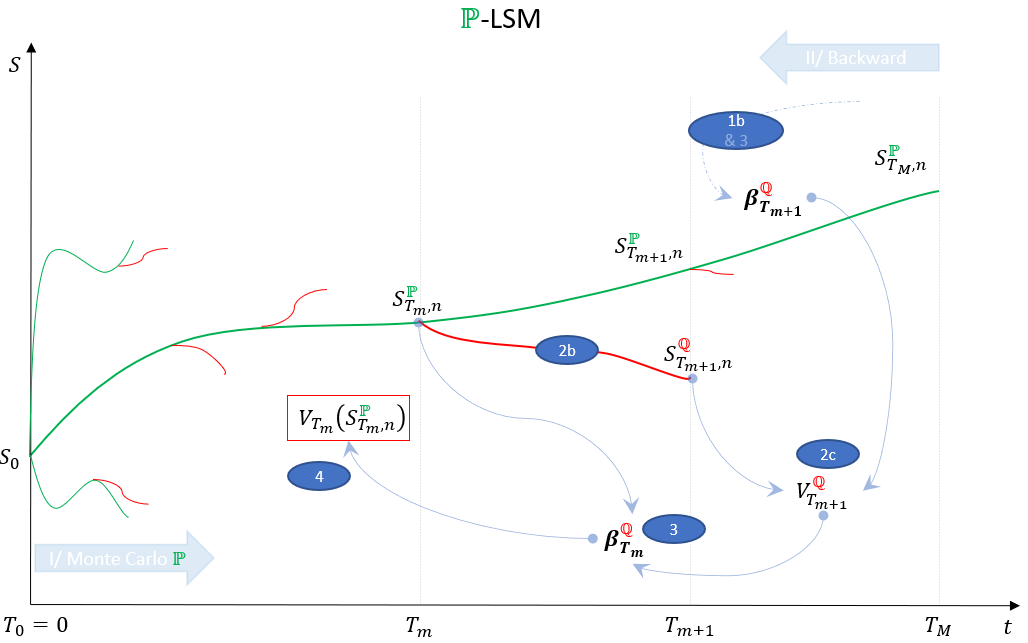
Les paramètres sont connus. La surface de volatilité est aussi connue.

Le facteur de risque est , la régression sera faite sur des fonctions de base polynomiales d’ordre sur : .

**I/ MC sous**  :

A la date , projeter scénarios sous

**II/ Backward** : Calculer de manière rétrograde de jusqu’à (on note )

1. 
2. *Illustration de la méthode P-LSM*
3. Etape 1 : à , Initialiser en calculant avec

Etape 1b : Initialiser les

1. Etape 2 : à pour , calculer les fonctions de base

Etape 2b : A chaque nœud dont la valeur du sous-jacent est , projeter un seul scénario sous à la date pour obtenir

Etape 2c : Approximer à partir de et

On note bien que était déjà obtenu dans l’étape et qu’il est bien sous entre (grâce à l’étape 1b pour et l’étape 3 suivante pour ).

1. Etape 3 : Appliquer la méthode de régression pour retrouver à partir de (obtenue de l’étape I/MC sous ) et (obtenu de l’étape 2c). On note bien que la régression est bien faite sous entre
2. Etape 4 :  Comme dans la méthode LSM classique, approximer l’espérance avec les obtenue de l’étape 3

*Remarque :*

* *S’il y a un cash-flow arrive à la date , on ajoute dans le membre droit, par exemple*
* *S’il y a une option à la date (par exemple obtenir un payoff si exercer), on la fait à cette étape, par exemple*

Répéter les étapes 2, 3 et 4 jusqu’à  pour obtenir

**END :** A partir des obtenus, on peut calculer l’EPE

# Annexe 3 : P-LSQ avec le modèle Heston

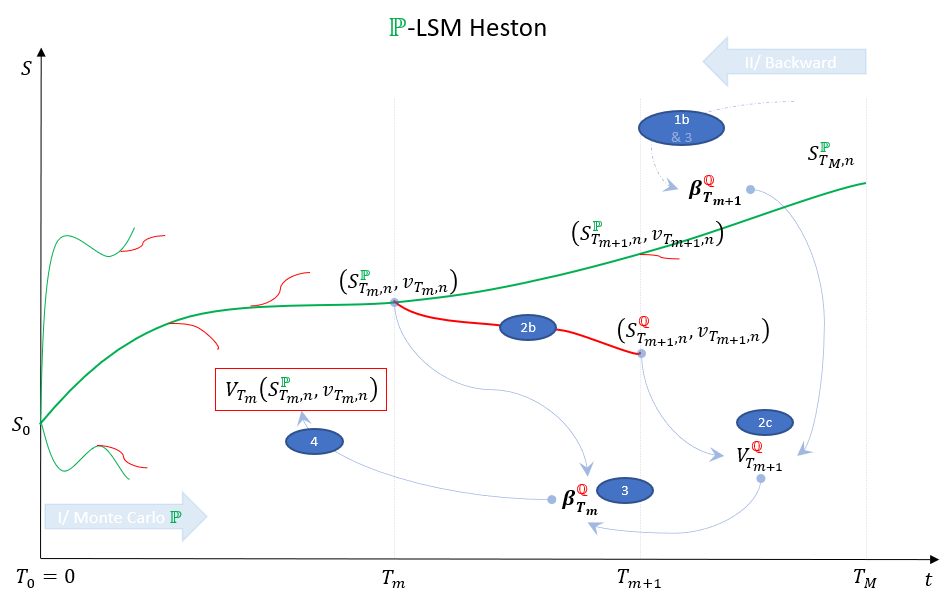
On prend le modèle Heston pour illustration

Comme maintenant il y a deux facteurs de risque , la régression sera faite sur des fonctions de base polynomiales d’ordre sur et : .

**I/ MC sous**  :

A la date , projeter scénarios sous

**II/ Backward** : Calculer de manière rétrograde de jusqu’à (on note )



*Illustration de la méthode P-LSM avec le modèle Heston*

1. Etape 1 : à , Initialiser en calculant avec

Etape 1b : Initialiser les

1. Etape 2 : à pour , calculer les fonctions de base

Etape 2b : A chaque nœud dont la valeur du sous-jacent est , projeter un seul scénario sous à la date pour obtenir

Etape 2c : Approximer à partir de et

On note bien que était déjà obtenu dans l’étape et qu’il est bien sous entre (grâce à l’étape 1b pour et l’étape 3 suivante pour ).

1. Etape 3 : Appliquer la méthode de régression pour retrouver à partir de (obtenue de l’étape I/MC sous ) et (obtenu de l’étape 2c). On note bien que la régression est bien faite sous entre
2. Etape 4 :  Comme dans la méthode LSM classique, approximer l’espérance avec les obtenue de l’étape 3

*Remarque :*

* *S’il y a un cash-flow arrive à la date , on ajoute dans le membre droit, par exemple*
* *S’il y a une option à la date (par exemple obtenir un payoff si exercer), on la fait à cette étape, par exemple*

Répéter les étapes 2, 3 et 4 jusqu’à  pour obtenir

**END :** A partir des obtenus, on peut calculer l’EPE

# Bibliographie

Feng, Q., Jain, S., Karlsson, P., Kandhai, D., & Oosterlee, C. (2016). Efficient computation of exposure profiles on real-world and risk-neutral scenarios for Bermudan swaptions.

Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer.

Jaina, S., & Oosterlee, C. W. (2015). The Stochastic Grid Bundling Method: Efficient pricing of Bermudan options and their Greeks. *Applied Mathematics and Computation*.

Savine, A., & Huge, B. (2017). LSM Reloaded, Differentiate xVA on your Ipad Mini. 287-301.

Stein, Harvey. (2017). *Fixing Risk Neutral Risk Measures.* Récupéré sur https://sci-hub.tw/10.2139/ssrn.2365540



1. Pour rappel, un processus markovien ne dépend pas de l’information du passé. Par exemple, le processus à volatilité locale [↑](#footnote-ref-2)
2. En fait, . On aussi peut utiliser la décomposition SVD et ajouter un facteur de régularisation pour atténuer le problème de colinéarité . [↑](#footnote-ref-3)
3. On note bien que dans le modèle Heston, nous avons maintenant deux facteurs de risques [↑](#footnote-ref-4)
4. Les variables et ne doivent pas être forcément différents. Mais si on veut optimiser le temps de calcul, on peut reprendre les pour projeter [↑](#footnote-ref-5)
5. Par exemple, le modèle est un modèle à drift local. [↑](#footnote-ref-6)
6. En générale, à mon avis, il faut que le drift et le taux soient indépendant d’autres facteurs de risques du modèle. Si le modèle sous-jacent est un modèle à volatilité stochastique, la volatilité est un facteur de risque supplémentaire, alors, il faut que et soient indépendants de . [↑](#footnote-ref-7)
7. La formule complète est , puis [↑](#footnote-ref-8)
8. Note : Pour le pricing d’un produit avec plusieurs dates d’exercice, il suffit de faire des simulations seulement aux dates d’exercice. Mais pour le calcul EPE, calculer uniquement sur les dates d’exercice n’est pas suffisant (autrement dit, et ).

   1/Si les fonctions de base possèdent une forme avec laquelle on peut calculer analytiquement pour (par exemple, si sont des fonctions polynomiales, on peut trouver les tels que ), alors il suffit d’appliquer la régression seulement à des dates d’exercice (ou dates de cash-flows) ( et ) et pas sur l’ensemble des dates de simulation (il s’agit d’une amélioration pour réduire le temps de calcul). Consulter la partie 3.1.1 (Feng, Jain, Karlsson, Kandhai, & Oosterlee, 2016)

   2/Dans le cas contraire où il n’existe pas la formule analytique pour . D’un point de vue de précision(pas d’un point vue de temps de calcul), à chaque date , il faut faire la régression où est la première date d’exercice (ou date de cash-flow) après (Savine & Huge, 2017, p. 35) au lieu de (avec la date ). L’algorithme du dessous fait la régression avec juste pour simplifier la lecture. [↑](#footnote-ref-9)